۱۷۰۶.★ اگر $\tan\beta=\frac{1}{2}$ و $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۴)

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

۱۷۰۷. اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ چقدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۱/۸ ۳) ۲/۴ ۴) ۲/۵

۱۷۰۸.☆ اگر $\tan\alpha=2$ و $\tan\beta=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan(2\alpha-\beta)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

۱) -3 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۳

۱۷۰۹. ساده‌شدهٔ عبارت $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ کدام است؟

۱) $\cos\alpha-\sin\alpha$ ۲) $\cos 2\alpha$ ۳) $1+\sin 2\alpha$ ۴) $1-\sin 2\alpha$

۱۷۱۰.☆ اگر $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۳)

۱) $-\frac{2}{9}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۱۷۱۱.★ حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ}-\frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۷۱۲. اگر $\sin x(\cos x-\sin x)=-1$ باشد، آن‌گاه $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۷۱۳. اگر $\sin x\cos x=\frac{1}{18}$ باشد، حاصل $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۷۱۴. در صورتی که $\tan(\alpha+15)=\frac{1}{4}$، حاصل $\cot(60^\circ-2\alpha)$ کدام است؟

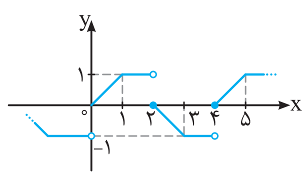
۱) $\frac{8}{15}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

قسمت ششم: تناوب و توابع مثلثاتی

(ابتدا درس مربوط به این قسمت را در جلد آموزش مطالعه نمایید.)

دورهٔ تناوب و تابع متناوب

۱۷۱۵.☆ دورهٔ تناوب تابع f که نمودار آن به‌صورت مقابل می‌باشد، کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۱۶.★ تابع متناوب $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2\end{cases}$ را که دورهٔ تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیهٔ محصور به منحنی f و محور xها در بازهٔ $[-0/75, 3/25]$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۱۷۱۷.☆ دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=5\cos(\sqrt{2}x)-3$ کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{2\pi}{5}$ ۳) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{2}\pi$

۱۷۱۸. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $y=-\pi\sin\left(\frac{1}{2}(x-2)\right)$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 4π ۴) ۲

۱۷۱۹.★ نمودار تابع $f(x)=4-3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{b\pi x}{3}\right)$ در هر بازه به طول $\frac{2}{3}$ تکرار می‌شود. مقدار مثبت b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

★۱۷۲۰. دورهٔ تناوب تابع $y=\cos((2x+1)\pi)$ سه برابر دورهٔ تناوب تابع $y=\sin((ax+5)\pi)$ است. a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۷۲۱. دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(\frac{\pi}{2}-bx)$ برابر π است. اگر نمودار این تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{2},3)$ بگذرد، محور عرض‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) -3 ۳) ۳ ۴) -2

☆۱۷۲۲. اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos x\cos 3x+\sin x\sin 3x$ برابر T_1 و دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x$ برابر T_2 باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $T_1=T_2$ ۲) $T_2=2T_1$ ۳) $T_1+T_2=4\pi$ ۴) $T_1=2T_2$

۱۷۲۳. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۱۷۲۴. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\tan x+\cot x}$ کدام است؟

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۷۲۵. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\tan 3x-\tan^3 3x}{(1+\tan^2 3x)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) π

☆۱۷۲۶. دورهٔ تناوب تابع $y=-\pi+\sqrt{2}\tan 3x$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

☆۱۷۲۷. دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan 2x-\cot 2x$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

★۱۷۲۸. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

۱۷۲۹. اگر دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\tan ax}{1-\tan^2 ax}$ برابر $\frac{3}{2}$ باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) ۳ ۴) 3π

★۱۷۳۰. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

۱۷۳۱. اگر تابع f متناوب با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و دورهٔ تناوب آن $T=2$ و ضابطهٔ آن در بازهٔ $[0,2)$ به‌صورت $f(x)=x^2$ باشد، $f(7/1)$ کدام است؟

۱) ۵۰/۴۱ ۲) ۴۹/۰۱ ۳) ۰/۰۱ ۴) ۱/۲۱

۱۷۳۲. دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x)=\tan x\cot x$ کدام است؟

۱) متناوب نیست. ۲) هر مقدار مثبت می‌تواند باشد. ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۱۷۳۳. اگر f تابعی متناوب با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، رابطهٔ $f(x+2)f(x)=1$ برقرار است. کدام عدد زیر دورهٔ تناوب تابع f است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۷۳۴. فرض کنید تابع f به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x=1$ و $x=3$ متقارن باشد. کدام عبارت زیر درست است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۱) f تابعی فرد است. ۲) f تابعی زوج است.

۳) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است. ۴) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس

تو این قسمت فقط به حل تستای مربوط به توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌پردازی.

۱۷۳۵. کدام گزینه درست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\sin ۲۵$ یک عدد حقیقی است.
۲) عددی می‌توان یافت که کسینوس آن برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.
۳) $\sin ۳ = \sin ۳^\circ$
۴) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایرهٔ مثلثاتی که اندازهٔ آن x درجه باشد.

۱۷۳۶. کدام گزینه درست است؟

۱) توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$، تنها توابع مثلثاتی هستند.
۲) توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن‌ها برابر π است.
۳) اگر نمودار $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در راستای محور xها به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار $y=\cos x$ به‌دست می‌آید.
۴) دامنه و برد توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به ترتیب $[-۱,۱]$ و $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۱۷۳۷. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-۱}{\sin x}$ به کدام صورت است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq ۲k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
۲) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}\}$
۴) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}\}$

۱۷۳۸. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۱-\cos x}$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
۲) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq \frac{k\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq ۲k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
۴) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq (۲k+۱)\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

۱۷۳۹. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin \pi x-۱}$، مقدار $f\left(-\frac{۱}{۲}f(x)\right)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۱-
۲) ۱
۳) صفر
۴) تعریف‌نشده

۱۷۴۰. با کدام ضابطهٔ $f(x)$، همواره تساوی $(-۱)^{[x]}f(x)=|f(x)|$ برقرار است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)

۱) $\sin \pi x$
۲) $\cos \pi x$
۳) $\sin ۲\pi x$
۴) $\cos ۲\pi x$

ماکسیمم و مینیمم توابع سینوسی و کسینوسی

۱۷۴۱. اختلاف بیش‌ترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۳}-\pi\sin(۲x-۱)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر
۲) ۲π
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۳}$

۱۷۴۲. در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳\cos(\frac{۳\pi}{۵}x-\frac{\pi}{۴})+۱$ کدام گزینه نادرست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

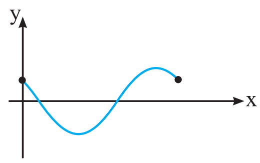
۱) $\max=۴$
۲) $\min=-۴$
۳) $T=\frac{۱۰}{۳}$
۴) محور yها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند.

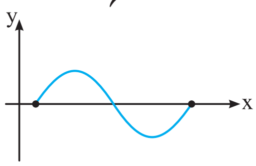
۱۷۴۳. اگر در مورد تابع f بدانیم $\max=۹$، $\min=۳$ و $T=۳\pi$، ضابطهٔ این تابع کدام می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

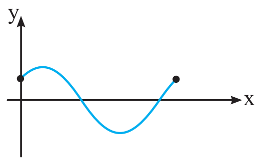
۱) $y=۶\sin(\frac{۲\pi}{۳}x)+۳$
۲) $y=۳\cos(\frac{۲}{۳}x)-۶$
۳) $y=۶-۳\sin(\frac{۲}{۳}x)$
۴) $y=۶\cos(\frac{۲}{۳}x)+۳$

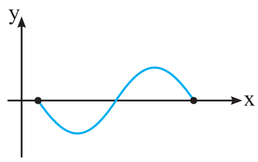
نمودار توابع مثلثاتی

۱۷۴۴. کدام‌یک از نمودارهای زیر، بخشی از نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۶})$ است؟

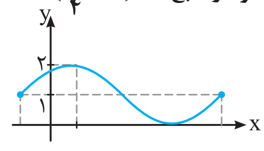
۱)


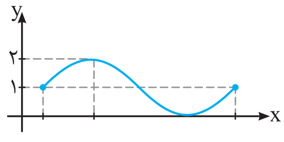
۲)


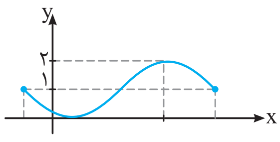
۳)


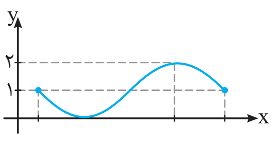
۴)


۱۷۴۵. نمودار تابع $y=\sin(\frac{\pi}{۴}+x)+۱$ در یک دورهٔ تناوب چگونه است؟

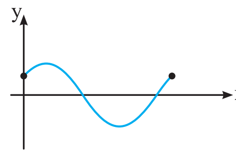
۱)


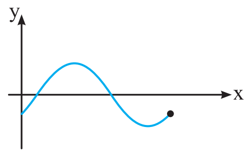
۲)


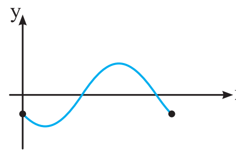
۳)


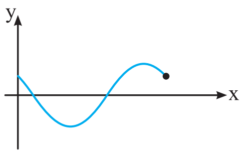
۴)


۱۷۴۶. کدام نمودار زیر، بخشی از نمودار تابع $y=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$ است؟

۱) 

۲) 

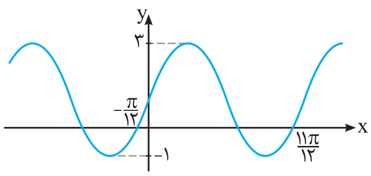
۳) 

۴) 

۱۷۴۷. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-2\sin(x+\frac{\pi}{6})$ در بازهٔ $[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

۱) فقط ناحیهٔ چهارم ۲) فقط ناحیهٔ سوم ۳) نواحی سوم و چهارم ۴) فقط ناحیهٔ اول

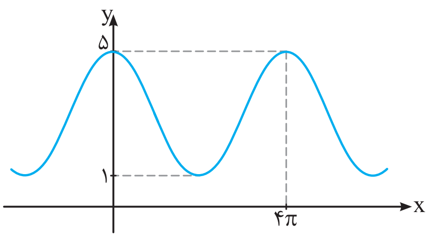
۱۷۴۸. نمودار شکل زیر، مربوط به کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) $y=3\sin(\frac{x}{2})+1$ ۲) $y=2\sin(2x)+1$

۳) $y=4\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})-1$ ۴) $y=2\cos(2x-\frac{\pi}{12})+1$

۱۷۴۹. نمودار شکل زیر، مربوط به کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



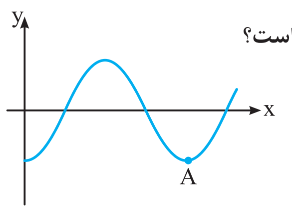
۱) $y=3\cos(\frac{1}{2}x)+2$

۲) $y=2\sin(\frac{2x+5\pi}{2})+3$

۳) $y=2\cos(\frac{1}{2}x)+3$

۴) $y=5-4\sin(\frac{1}{2}x)$

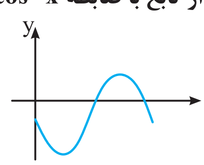
۱۷۵۰. شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$ می‌باشد. مختصات نقطهٔ A کدام است؟

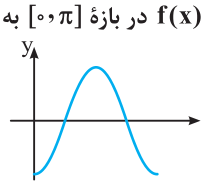


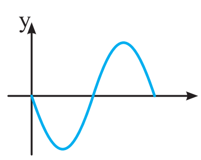
۱) $(\pi,-1)$ ۲) $(2\pi,-1)$

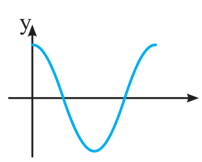
۳) $(\frac{5\pi}{4},-1)$ ۴) $(\frac{5\pi}{4},-2)$

۱۷۵۱. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=2-4\cos^2 x$ در بازهٔ $[0,\pi]$ به کدام صورت است؟

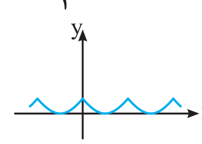
۱) 

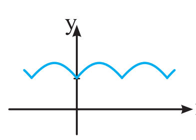
۲) 

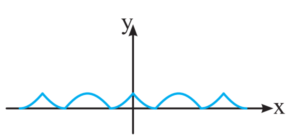
۳) 

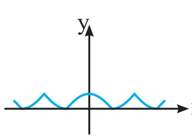
۴) 

۱۷۵۲. نمودار $||\cos x|-\frac{1}{2}|=y$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

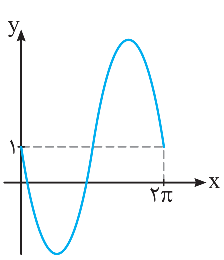
۳) 

۴) 

کاربرد دورهٔ تناوب و ماکسیمم و مینیمم در حل مسائل

استفاده از دورهٔ تناوب، واسه پیدا کردن پارامتر تو تستایی که نمودار و ضابطهٔ اونا داده می‌شه، یکی از مهم‌ترین مباحثه و تستای زیادی از این مبحث تو کنکور مطرح شده.

۱۷۵۳. شکل مقابل، نمودار تابع $y=a+3\sin bx$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ است. ab کدام است؟



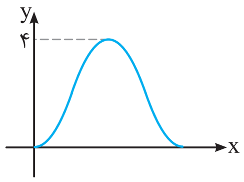
۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۲-

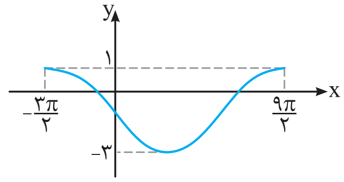
۴) ۳-

★۱۷۵۴. شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ در بازهٔ $(۰,۴)$ است. مقدار b کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۷)



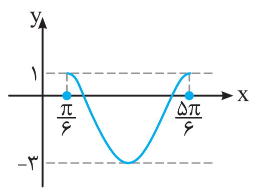
۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

★۱۷۵۵. شکل زیر، نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)



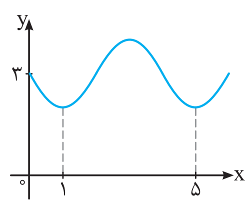
۱) ۲-
۲) ۳-
۳) ۴-
۴) ۶-

☆۱۷۵۶. شکل زیر، نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$، در یک بازهٔ تناوب است. مقادیر b و c، کدام‌اند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)



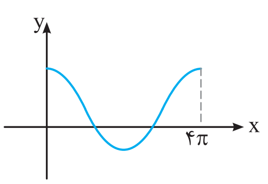
۱) $b=۳ , c=-۱$
۲) $b=۳ , c=-۲$
۳) $b=\frac{۳}{۲} , c=-۲$
۴) $b=\frac{۳}{۲} , c=-۱$

☆۱۷۵۷. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطهٔ $x=\frac{۲۵}{۳}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)



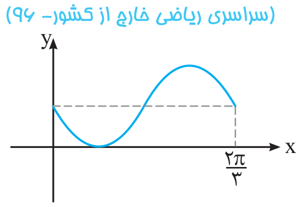
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

☆۱۷۵۸. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}+۲\cos(mx)$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۱۶\pi}{۳}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۶)



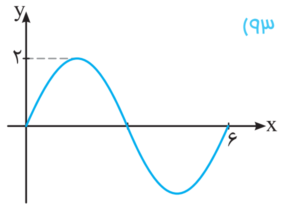
۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) صفر

۱۷۵۹. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y=۱-\sin(mx)$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۷\pi}{۶}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۶)



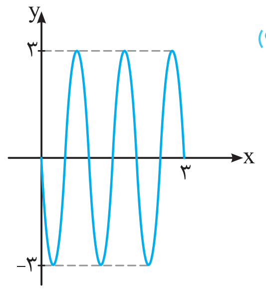
۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

۱۷۶۰. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۳)



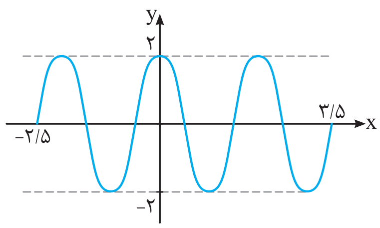
۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۸}{۳}$

★۱۷۶۱. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a.b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۲)



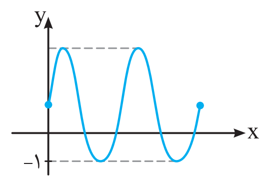
۱) ۶-
۲) ۳-
۳) ۴/۵
۴) ۶

۱۷۶۲. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(\pi(\frac{۱}{۲} + bx))$ است. a.b کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)



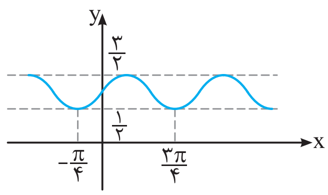
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۱۷۶۳. شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = ۱ + a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $(۰, \frac{۴}{۳})$ است. $a + b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)



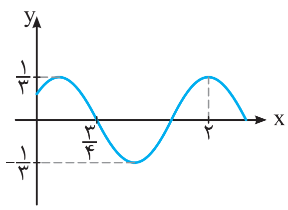
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۷۶۴. شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۸)



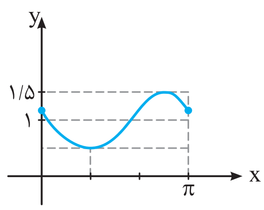
۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۱۷۶۵. نمودار مقابل بخشی از نمودار تابع $f(x) = a\cos(bx + c)$ است $(a, b > ۰)$. مقدار c کدام است؟



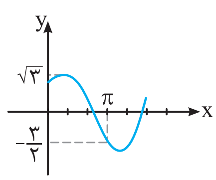
۱) $\frac{۲\pi}{۵}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۲\pi}{۵}$
۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۷۶۶. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + a\sin(bx - \frac{\pi}{۶})$ است. $a + b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)



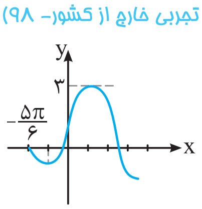
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۱۷۶۷. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۸)



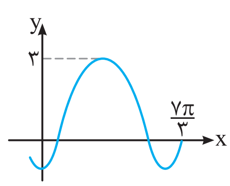
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

۱۷۶۸. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۸)



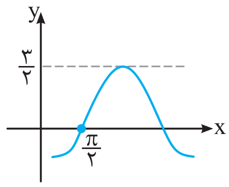
۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) $۱ + \sqrt{۳}$

۱۷۶۹. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b، کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۹)



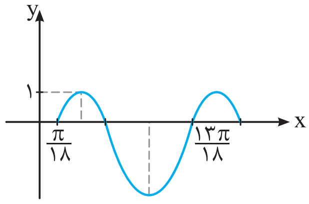
۱) ۲
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲

۱۷۷۰. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. مقدار a، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۹)



۱) -1
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 1

۱۷۷۱. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a - 2\cos(bx + \frac{\pi}{2})$ است. $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۵)



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1
۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۱۷۷۲. می‌دانیم طول روز در هر سال مشابه سال قبل تکرار می‌شود. به طوری‌که از اول فروردین تا اول تابستان طول روزها در حال افزایش و از اول تابستان تا اول زمستان در حال کاهش و دوباره از اول زمستان طول روزها افزایش می‌یابد. اگر $t = 0$ بیان‌گر روز اول فروردین و $t = 365$ نشان‌دهندهٔ روز آخر سال باشد (سال را کبیسه می‌گیریم) و تابع $L(t) = a\sin bt + c$ بیان‌گر طول روز tام بر حسب ساعت و هم‌چنین طول اولین روز تیر، ۱۵/۵ ساعت و طول اولین روز دی ۹ ساعت باشد، طول روز سی‌ویکم اردیبهشت تقریباً چند ساعت است؟ $(\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0/85)$ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۳/۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۴/۵ ۴) ۱۵

حل معادله به روش هندسی

تستای حل معادله به روش هندسی رو قبلاً تو مبحث معادلات حل کردی. این‌جا صرفاً چند تست که نسبت مثلثاتی توش به کار رفته رو حل می‌کنی.

۱۷۷۳. چند زاویه مانند θ در $[-\pi, 2\pi]$ وجود دارد، به طوری‌که $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۷۴. معادلهٔ $|\frac{x}{2}| = |\sin x|$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۱۷۷۵. معادلهٔ $\sin x + \cos x = 0$ در $[-\pi, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۷۶. معادلهٔ $x\cos x = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

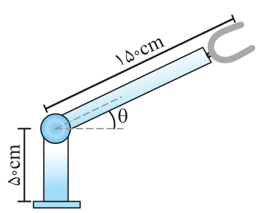
۱۷۷۷. معادلهٔ $|\log x| + |\cos x| = 1$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسائل

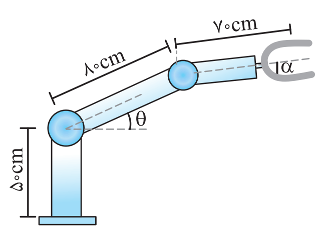
تو کتابای درسی به کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسئله، خیلی بها داده شده. نمونه‌هایی از مثالا و تمرینای کتاب رو می‌بینی.

۱۷۷۸. شکل مقابل یک روبات صنعتی را نشان می‌دهد که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد. کدام تابع زیر، ارتفاع نوک گیرهٔ روبات را از سطح زمین بر حسب θ مشخص می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) $y = 150 + 50\sin\theta$
۲) $y = 150 + 50\cos\theta$
۳) $y = 50 + 150\sin\theta$
۴) $y = 50 + 150\cos\theta$

۱۷۷۹. شکل روبه‌رو، یک روبات صنعتی را نشان می‌دهد که دارای دو مفصل مکانیکی است. اگر برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۱۲۵ سانتی‌متری، این روبات مفصل اول خود را در حالت $\theta = 30^\circ$ قرار دهد، در این وضعیت α چند درجه خواهد بود؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) صفر ۲) ۳۰
۳) ۴۵ ۴) ۶۰

☆۱۷۸۰. یک ساعت دیواری به شعاع ۲۰ سانتی‌متر روی یک دیوار نصب شده است. اگر فاصلهٔ عدد ۶ روی محیط ساعت از زمین ۲ متر باشد، فاصلهٔ عدد ۵ تا زمین چقدر است؟ $(\sqrt{3} = 1/7)$

۱) ۲ متر و ۱ سانتی‌متر ۲) ۲ متر و ۲ سانتی‌متر ۳) ۲ متر و ۳ سانتی‌متر ۴) ۲ متر و ۴ سانتی‌متر

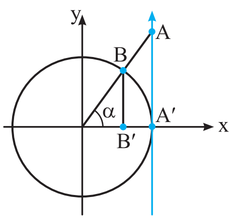
۱۷۸۱. مهدی قصد دارد سوار چرخ‌وفلکی به شعاع ۲۰ متر شود که از سطح زمین ۲ متر فاصله دارد. پس از آن‌که مهدی سوار کابین شمارهٔ (۱) می‌شود و چرخ‌وفلک به اندازهٔ 120° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخد، ناگهان چرخ‌وفلک متوقف می‌شود. در این لحظه ارتفاع مهدی از سطح زمین چند متر است؟

۱) ۳۸ ۲) ۳۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۰

۱۷۸۲. چرخ‌وفلکی به شعاع ۱۵ متر، هر ۲ دقیقه یک دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. شخصی از سکویی که ارتفاع آن ۳ متر است، بالا رفته و سوار پایین‌ترین کابین می‌شود. پس از ۲۰ ثانیه این شخص در چه ارتفاعی از زمین قرار دارد؟

۱) ۹/۵ متر ۲) ۱۰/۵ متر ۳) ۱۱/۵ متر ۴) ۱۲/۵ متر

تابع تانژانت



☆۱۷۸۳. در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، مقدار عددی $\frac{AA'}{BB'}$ وقتی $\alpha = 60^\circ$ باشد، کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

★۱۷۸۴. چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x) = \tan x$ درست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

آ) در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که در آن نزولی باشد.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که در آن غیرصعودی باشد.

ت) در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی است.

ث) برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

ج) تابعی متناوب با دورهٔ تناوب π است.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷۸۵. اگر $-\frac{\pi}{8} < x < 0$ ، $\tan 2x = \frac{m+1}{m-2}$، حدود m کدام است؟

۱) $m > 2$ ۲) $-1 < m < 2$ ۳) $m < 0$ ۴) $-1 < m < \frac{1}{2}$

★۱۷۸۶. کدام گزینه نادرست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\sin\alpha < \tan\alpha$

۲) اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$، آن‌گاه $\tan\alpha < \sin\alpha$

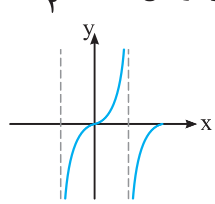
۳) اگر $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$، آن‌گاه $\sin\alpha < \tan\alpha$

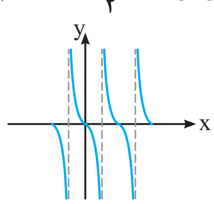
۴) اگر $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$، آن‌گاه $\sin\alpha < \tan\alpha$

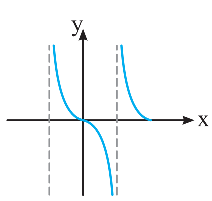
☆۱۷۸۷. تابع با ضابطهٔ $f(x) = \tan 2x$ به ازای چند مقدار x از بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ تعریف نمی‌شود؟

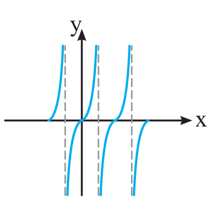
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

☆۱۷۸۸. نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{2}\tan 2x$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ به کدام صورت است؟

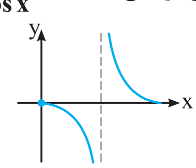
۱)


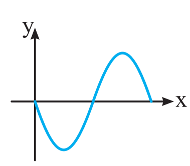
۲)


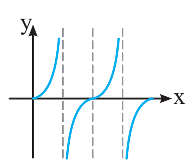
۳)


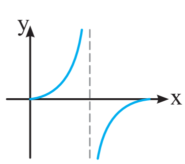
۴)


۱۷۸۹. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به کدام صورت است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


قسمت هفتم: معادلات مثلثاتی

(ابتدا درس مربوط به این قسمت را در جلد آموزش مطالعه نمایید.)

یافتن جواب کلی در معادلات مثلثاتی

☆۱۷۹۰. یک جواب کلی معادلهٔ $\sin ۳x = \sin ۲x$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}$ ۳) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}$ ۴) $\frac{k\pi}{۳}$

☆۱۷۹۱. جواب کلی معادلهٔ $۴\cos ۲x = \sqrt{۸}$ کدام است؟

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۸}$

☆۱۷۹۲. جواب کلی معادلهٔ $\tan(\frac{\pi}{۴}+x) = \tan ۵x$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۶}$

☆۱۷۹۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۳x + \sin x = ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

★۱۷۹۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$، با شرط $\cos x \neq ۰$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴ و ۹۸)

۱) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۱۷۹۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)} = ۱$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۹۳)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

★۱۷۹۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۳x + \sin ۲x}{۱+\cos x} = ۰$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۵}$ ۴) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}$

☆۱۷۹۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \sqrt{۳}$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$

۱۷۹۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan ۳x = \frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

۱۷۹۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x) = \sin^۲ x - \cos^۲ x$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

☆۱۸۰۰. یکی از جواب‌های معادلهٔ $۲\sin^۲ x - ۳\sin x - ۲ = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

★۱۸۰۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۰$، کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۵)

۱) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{۳}$

۱۸۰۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x = ۳\cos x$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی - ۸۶)

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

★۱۸۰۳. جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$، با شرط $x \neq k\pi$، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۹)

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

۱۸۰۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos x(\cos x - \sin x) = ۱$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

۱۸۰۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x - \sin ۲x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

☆۱۸۰۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۱ - \cos ۲x}{\sin ۲x} = \sqrt{۳}$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

۱) $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$

۱۸۰۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos ۲x = \cot x(۴\sin x + \tan x)$، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۲)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

☆۱۸۰۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی - ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

۱۸۰۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin(\pi - x).\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) + ۳\cot x.\sin(\pi + x) = ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی - ۸۷)

۱) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

★۱۸۱۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲ \frac{۵\pi}{۴}$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی - ۹۲)

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۱۸۱۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۴}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۵)

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۱۸۱۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = \cos\frac{۴\pi}{۳}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$

★۱۸۱۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x \tan ۳x = ۱$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی - ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۸}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

☆۱۸۱۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan(x + \frac{\pi}{۴}) + \tan(x - \frac{\pi}{۴}) = ۲\sqrt{۳}$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی - ۸۹)

۱) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$

۱۸۱۵. جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{۶}) + \cos(x + \frac{\pi}{۳}) = \cos ۲x$، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۹)

۱) $x = \frac{۲k\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z}$

۳) $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z}$ ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z}$

☆۱۸۱۶. یکی از جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x+\cos x=1$ به کدام صورت است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{2}$

★۱۸۱۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

☆۱۸۱۸. در معادلهٔ مثلثاتی $-\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$، یکی از صورت‌های کلی جواب کدام است؟

۱) $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ ۲) $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$

★۱۸۱۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x+2\cos^2 x=0$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۶)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۱۸۲۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2\frac{5\pi}{6}=\sin(\frac{\pi}{2}+x)\cos(-x)$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

☆۱۸۲۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(1+\tan^2 x)\cos(\pi+2x)=2$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۱۸۲۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$، به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

★۱۸۲۳. جواب‌های کلی معادلهٔ $5\sin x+3\cos(\frac{3\pi}{2}-x)-1=0$ به‌صورت $x=2k\pi+\frac{i\pi}{6}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام‌اند؟

۱) $\{1,5\}$ ۲) $\{1,7\}$ ۳) $\{5\}$ ۴) $\{1,5,7\}$

حالت‌های خاص در معادلات مثلثاتی

☆۱۸۲۴. جواب کلی معادلهٔ $\sin^3 x-\sin x=0$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}$

☆۱۸۲۵. نمودار تابع $y=3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$، روی بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$، در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸۲۶. اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin b\pi x$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، نمودار تابع در بازهٔ $[0,1]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☆۱۸۲۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\tan x.\cos^2 x=1$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$

۱۸۲۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)=1+\sin(\frac{5\pi}{2}+x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۵)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

۱۸۲۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x\sin(3\pi-x)-\sin 3x\cos(\pi+x)=\cos\frac{3\pi}{2}$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

☆۱۸۳۰. جواب کلی معادلهٔ $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{2}$

۱۸۳۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\frac{5\pi}{6}+\sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi+x)=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$

☆۱۸۳۲. یکی از جواب‌های معادلهٔ $\sin 3x\cos x=1-\cos 3x\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{5\pi}{8}$

۱۸۳۳. جواب کلی معادلهٔ $\sin 5x(\cos 3x-\sin 5x)+\cos 5x(\sin 3x-\cos 5x)=0$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{16}$ ۳) $\frac{k\pi}{8}+\frac{\pi}{16}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

☆۱۸۳۴. جواب کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\sin x}=2\cos^2 x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

۱۸۳۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\sin 3x=\cos 2x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{k\pi}{3}$

۱۸۳۶. تمام جواب‌های معادلهٔ $\sin^4 x+\cos^4 x=1$ کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ ۴) $2k\pi$

۱۸۳۷. جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x=\sin x$ به‌صورت $x=2k\pi+\frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟

۱) $\{7,9\}$ ۲) $\{1,3,5\}$ ۳) $\{1,4,7\}$ ۴) $\{1,5,9\}$

۱۸۳۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ با شرط $x\neq\frac{k\pi}{2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۱۸۳۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x\sin 4x+\sin^2 x=1$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۷)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۲) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{k\pi}{6}$

۱۸۴۰. جواب کلی معادلهٔ $\sin 3x-\sin x+4\sin^2 x=2$، با شرط $x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{4}$

۱۸۴۱. جواب کلی معادلهٔ $3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\sin 2x+5=0$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi-\frac{5\pi}{4}$ ۴) $2k\pi-\frac{3\pi}{4}$

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در یک بازه

۱۸۴۲. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x+\sin 4x=1+\cos\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) 8π ۲) 9π ۳) 10π ۴) 11π

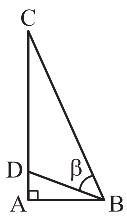
☆۱۸۴۳. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن‌ها ۳ و ۴ سانتی‌متر و مساحت آن‌ها ۳ سانتی‌متر مربع باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

☆۱۸۴۴. یک فوتبالیست، توپ را با سرعت $60\,km/h$ به سمت دروازهٔ حریف که در ۳۶ متری او قرار گرفته، می‌فرستد. اگر رابطهٔ بین سرعت توپ v (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی‌شدهٔ افقی d (بر حسب متر) و زاویهٔ حرکت توپ θ، به‌صورت $d=\frac{v^2}{50}\sin 2\theta$ باشد، زاویهٔ حرکت توپ کدام می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) 10° ۲) 15° ۳) $22/5^\circ$ ۴) 30°

۱۸۴۵. در شکل مقابل، اگر $AD = 0/5$، $CD = 2/5$ و $AB = 1$ باشد، زاویهٔ β چند درجه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۷۵
۲) ۶۰
۳) ۴۵
۴) ۳۰

☆۱۸۴۶. معادلهٔ $\sin(\pi\cos x) = -1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

★۱۸۴۷. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x)\cos(3x) = 1$، در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$، کدام است؟ (سراسری تجربی- ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۸۴۸. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $5\sin^2(x) + 2\cos(3x) = -2$، در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۸۴۹. معادلهٔ $\sin 2x + \sqrt{2}\cos x = 0$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☆۱۸۵۰. معادلهٔ $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

★۱۸۵۱. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4\sin(3x)\cos(3x) = 1$، در بازهٔ $[0, \frac{\pi}{2}]$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۹)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

★۱۸۵۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4\sin x\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۸)

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۱۸۵۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

☆۱۸۵۴. معادلهٔ $\tan 2x - \cot(x - \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

★۱۸۵۵. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(3x)\tan(x) = 1$، در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۹)

۱) 5π ۲) 6π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{2}$

☆۱۸۵۶. مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{8\pi}{3}$ ۲) $\frac{10\pi}{3}$ ۳) 3π ۴) $\frac{11\pi}{3}$

★۱۸۵۷. معادلهٔ $\sin x\cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۸۵۸. معادلهٔ $\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x = \frac{1}{4}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۸۵۹. معادلهٔ $1 + \sin x = \cos^4 x - \sin^4 x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

☆۱۸۶۰. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$، در بازهٔ $[0, \pi]$، برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $\frac{7\pi}{4}$ ۲) $\frac{9\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{3}$

۱۸۶۱. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$، در بازهٔ $[0,2\pi]$، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۸)

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) $\frac{7\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) 3π

۱۸۶۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$، در بازهٔ $[0,2\pi]$، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

۱۸۶۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۱۸۶۴. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(1+\cos(\alpha))(1+\cos(2\alpha))(1+\cos(4\alpha))=\frac{1}{8}$، در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۸۶۵. فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(1+\cos(2\alpha))(1+\cos(4\alpha))(1+\cos(8\alpha))=\frac{1}{8}$. در بازهٔ $[0,\pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعهٔ A، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{5}{7}\pi$ ۲) $\frac{6}{7}\pi$ ۳) $\frac{7}{9}\pi$ ۴) $\frac{8}{9}\pi$

۱۸۶۶. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $2\sin(x)\cos(2x)+\sin(x)=1$، در بازهٔ $[0,2\pi]$، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۱) 2π ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) 3π ۴) $\frac{7\pi}{2}$

۱۸۶۷. در معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x+\cos x=1$، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) مثلث قائم‌الزاویه

۳) ذوزنقه ۴) مستطیل

۱۸۶۸. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث متساوی‌الساقین

۱۸۶۹. مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+3\cos(x-\frac{5\pi}{8})=5$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{8}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{8}$

۱۸۷۰. در معادلهٔ مثلثاتی $8\sin^2 x+k\sin 2x=1$، مجموع جواب‌های متمایز در فاصلهٔ $[0,\pi]$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ است. k کدام است؟

۱) -2 ۲) -4 ۳) 2 ۴) 4

۱۷۱۹
۱ ۲ **۳** ۴

دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2}{3}$ است. پس:

$$T=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{2\pi}{\left|-\frac{b\pi}{3}\right|}=\frac{2}{3}\xrightarrow{b>0}\frac{6}{b}=\frac{2}{3}\Rightarrow b=9$$

۱۷۲۰
۱ ۲ ۳ ۴

$$y=\cos((2x+1)\pi)=\cos(2\pi x+\pi)\Rightarrow T_1=\frac{2\pi}{|2\pi|}=1$$

$$y=\sin((ax+5)\pi)=\sin(a\pi x+5\pi)\Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{|a\pi|}=\frac{2}{|a|}$$

طبق فرض داریم: $T_1=3T_2\Rightarrow 1=3\times\frac{2}{|a|}\Rightarrow |a|=6\Rightarrow a=\pm 6$

با توجه به گزینه‌ها، $a=6$ را می‌پذیریم.

۱۷۲۱
۱ **۲** ۳ ۴

$$y=a\sin(\frac{\pi}{2}-bx)\Rightarrow y=a\cos bx$$

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=2\xrightarrow{\cos 2x=\cos(-2x)} y=a\cos 2x$$

$$\xrightarrow{(\frac{\pi}{2},3)} 3=a\underbrace{\cos\pi}_{-1}\Rightarrow a=-3$$

$$\Rightarrow y=-3\cos 2x\xrightarrow{x=0} y=-3\cos 0=-3$$

۱۷۲۲
۱ ۲ ۳ **۴**

یادآوری:
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$f(x)=\cos x\cos 3x+\sin x\sin 3x=\cos(3x-x)=\cos 2x$$

$$\Rightarrow T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$g(x)=\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x=\cos(3x+x)=\cos 4x$$

$$\Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T_1=2T_2$$

۱۷۲۳
۱ **۲** ۳ ۴

یادآوری: $\sin 2x=2\sin x\cos x$ ، $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$$f(x)=\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x$$

$$=-\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}\sin 4x\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$$

۱۷۲۴
۱ ۲ **۳** ۴

یادآوری: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ ، $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده کرده و سپس دورهٔ تناوب آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\tan x+\cot x}=\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\frac{2}{\sin 2x}}$$

$$=\frac{\cos 2x\times 1}{\frac{2}{\sin 2x}}=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}\sin 4x$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

۱۷۲۵
۱ ۲ ۳ ۴

یادآوری: $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ، $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

بنابر نکتهٔ فوق داریم:

$$f(x)=\frac{\tan 3x(1-\tan^2 3x)}{(1+\tan^2 3x)^2}=\frac{\tan 3x}{1+\tan^2 3x}\times\frac{1-\tan^2 3x}{1+\tan^2 3x}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 6x\times\cos 6x=\frac{1}{4}\sin 12x\Rightarrow T=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

۱۷۲۶
۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر a، b، c و d اعداد حقیقی و a و $b\neq 0$ باشند، آن‌گاه دورهٔ تناوب توابع $y=a\tan^n(bx+c)+d$ و $y=a\cot^n(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است. $(n\in\mathbb{N})$

$$y=-\pi+\sqrt{2}\tan 3x\Rightarrow T=\frac{\pi}{3}$$

۱۷۲۷
۱ ۲ ۳ **۴**

یادآوری: $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$

داریم: $f(x)=\tan 2x-\cot 2x=-2\cot 4x\Rightarrow T=\frac{\pi}{4}$

۱۷۲۸
۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا با استفاده از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$، ضابطهٔ تابع را ساده کرده و سپس دورهٔ تناوب آن را می‌یابیم.

$$f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)=-2\cot(2\pi x)\Rightarrow T=\frac{\pi}{|2\pi|}=\frac{1}{2}$$

۱۷۲۹
۱ ۲ ۳ ۴

یادآوری: $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

بنابر یادآوری فوق، داریم:

$$f(x)=\frac{\tan ax}{1-\tan^2 ax}=\frac{1}{2}\tan 2ax\Rightarrow T=\frac{\pi}{|2a|}$$

$$\xrightarrow{T=\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2|a|}=\frac{3}{2}\Rightarrow |a|=\frac{\pi}{3}$$

۱۷۳۰
۱ **۲** ۳ ۴

یادآوری: $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\overset{\tan\frac{\pi}{4}=1}{=\!=\!=}\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan x.\tan\frac{\pi}{4}}=\tan(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{1}=\pi$$

۱۷۳۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: اگر f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، برای هر $n\in\mathbb{N}$، داریم: $f(x\pm nT)=f(x)$

در این تست، f متناوب و $T=۲$ است. پس بنابر نکتهٔ فوق می‌توان نوشت: $f(۷/۱)=f(۱/۱+۳\times۲)=f(۱/۱)=(۱/۱)^۲=۱/۲۱$

۱۷۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴

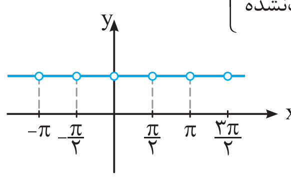
می‌توان نوشت:

$$f(x)=\tan x\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=\frac{\sin ۲x}{\sin ۲x}$$

$$\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲};(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sin ۲x}{\sin ۲x}=\begin{cases}۱ & x\neq\frac{k\pi}{۲}\\ \text{تعریف‌نشده} & x=\frac{k\pi}{۲}\end{cases}$$

نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، f متناوب بوده و $T=\frac{\pi}{۲}$

۱۷۳۳ ۱ ۲ **۳** ۴

در رابطهٔ $f(x+۲)f(x)=۱$، به جای x، $x+۲$ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(x+۴)f(x+۲)=۱$$

$$\xrightarrow{f(x+۲)f(x)=۱} f(x+۴)f(x+۲)=f(x+۲)f(x)$$

$$\xrightarrow{\div f(x+۲)\neq۰} f(x+۴)=f(x)$$

بنابراین $T=۴$ دورهٔ تناوب f است.

۱۷۳۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: الف) اگر تابع f متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آن‌گاه:
$f(x+T)=f(x)$

ب) اگر نمودار f نسبت به خط $x=\alpha$ متقارن باشد، آن‌گاه:
$f(x)=f(۲\alpha-x)$

بنا بر فرض، نمودار تابع f نسبت به خطوط $x=۱$ و $x=۳$ متقارن است، پس بنابر نکته:

$$f(x)=f(۲-x)\quad,\quad f(x)=f(۶-x)$$

می‌توان نوشت:

$$f(x)=f(۶-x)\xrightarrow{x\to ۲-x} f(۲-x)=f(۶-(۲-x))$$

$$f(۲-x)=f(۴+x)\xrightarrow{f(x)=f(۲-x)} f(x)=f(x+۴)$$

بنابراین تابع f متناوب با دورهٔ تناوب $T=۴$ است.

۱۷۳۵ **۱** ۲ ۳ ۴

در گزینهٔ (۱)، دامنهٔ $y=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ است. پس $\sin x$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ و به خصوص $x=۲۵$ تعریف می‌شود. در گزینهٔ (۲)، $\frac{\pi}{۳}>۱$ پس هیچ عددی مثل x یافت نمی‌شود که $\cos x=\frac{\pi}{۳}$. در گزینهٔ (۳)، ۳ رادیان تقریباً برابر $۱۷۱/۹°$ درجه است و لذا $\sin ۳\neq\sin ۳°$. در گزینهٔ (۴)، $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایرهٔ مثلثاتی که اندازهٔ آن x رادیان باشد نه x درجه.

۱۷۳۶ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به رابطهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{۲})=\cos x$، معلوم می‌شود که اگر نمودار $y=\sin x$ را $\frac{\pi}{۲}$ واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار $y=\cos x$ به‌دست می‌آید.

توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ ساده‌ترین توابع مثلثاتی از بین بی‌شمار تابع مثلثاتی هستند. پس گزینهٔ (۱) نادرست است. همچنین دورهٔ تناوب این توابع برابر $T=۲\pi$ بوده و لذا گزینهٔ (۲) نادرست است.

دامنهٔ توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن‌ها برابر $[-۱,۱]$ است. اما در گزینهٔ (۴) جابه‌جا آمده است. پس این گزینه نیز نادرست است.

۱۷۳۷ ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم مقدار $\sin x$ به ازای $x=۰$، $x=\pi$، $x=۲\pi$، $x=۳\pi$ و به طور کلی $x=k\pi$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$، برابر صفر می‌شود. پس در تابع $f(x)=\frac{x-۱}{\sin x}$ داریم:

$$\sin x\neq۰\Rightarrow x\neq k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

۱۷۳۸ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم مقدار $\cos x$ به ازای $x=۲\pi$، $x=۴\pi$ و به طور کلی $x=۲k\pi$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$، برابر یک می‌شود. پس در تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۱-\cos x}$ داریم:

$$۱-\cos x\neq۰\Rightarrow\cos x\neq۱\Rightarrow x\neq ۲k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq ۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

۱۷۳۹ **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا دامنهٔ تابع f را می‌یابیم:

$$\sin\pi x-۱\geq۰\Rightarrow\sin\pi x\geq۱\xrightarrow{\sin\pi x\leq۱}\sin\pi x=۱$$

می‌دانیم مقدار سینوس به ازای زوایای $\frac{\pi}{۲}$، $۲\pi+\frac{\pi}{۲}$، $۴\pi+\frac{\pi}{۲}$ و به طور کلی $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ برابر ۱ می‌شود. پس:

$$\sin\pi x=۱\Rightarrow\pi x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k+\frac{۱}{۲}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

واضح است که به ازای هر $k\in\mathbb{Z}$، $x=۲k+\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{Z}$، پس $[x]+[-x]=-۱$، بنابراین داریم:

$$f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin\pi x-۱}=-۱+۰$$

$$\Rightarrow f(x)=-۱\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}f(x))=f(\frac{۱}{۲})=-۱$$

۱۷۴۰ **۱** ۲ ۳ ۴

اگر $۰\leq x<۱$ باشد، آن‌گاه $[x]=۰$، در این صورت رابطهٔ $|f(x)|=(-۱)^{[x]}f(x)$ به‌صورت $f(x)=|f(x)|$ درمی‌آید که نتیجه می‌شود، در بازهٔ $[۰,۱)$، $f(x)\geq۰$ می‌باشد، داریم:

$$۰\leq x<۱\Rightarrow\begin{cases}۰\leq\pi x<\pi\\ ۰\leq ۲\pi x<۲\pi\end{cases}$$

پس بازهٔ $[۰,۱)$ برای کمان πx به منزلهٔ بازهٔ $[۰,\pi)$ و برای کمان $۲\pi x$ به منزلهٔ بازهٔ $[۰,۲\pi)$ می‌باشد. چون در بازهٔ $[۰,۱)$، $f(x)\geq ۰$ بود، پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که مقدار تابع در بازهٔ معادل آن نامنفی باشد. در نتیجه فقط گزینهٔ (۱) صحیح است. زیرا سینوس در بازهٔ $[۰,\pi)$ نامنفی است. اما تابع کسینوس در بازهٔ $[۰,\pi)$ می‌تواند منفی هم باشد و نیز توابع سینوس و کسینوس در بازهٔ $[۰,۲\pi)$ می‌توانند منفی نیز باشند.

۱۷۴۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نکته: به طور کلی در توابع $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$، $(a,b\neq ۰)$ داریم:

$$\max=|a|+c \quad , \quad \min=-|a|+c$$

همچنین عدد c همواره میانگین مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی:

$$c=\frac{\max+\min}{۲}$$

در این سؤال، $a=-\pi$ و $c=\sqrt{۳}$، پس بنابر نکتهٔ فوق داریم:

$$\max=|-\pi|+\sqrt{۳}=\pi+\sqrt{۳} \quad , \quad \min=-|-\pi|+\sqrt{۳}=\sqrt{۳}-\pi$$

$$\Rightarrow \max-\min=(\pi+\sqrt{۳})-(\sqrt{۳}-\pi)=۲\pi$$

۱۷۴۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

در این تابع داریم $a=۳$، $c=۱$ و $b=\frac{۳\pi}{۵}$، پس:

$$\max=|a|+c=۴ \quad , \quad \min=-|a|+c=-۳+۱=-۲$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\left|\frac{۳\pi}{۵}\right|}=\frac{۲\pi}{\frac{۳\pi}{۵}}=\frac{۱۰}{۳}$$

همچنین: $f(۰)=۳\cos(-\frac{\pi}{۴})+۱=۳\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+۱>۰$

پس نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند.

۱۷۴۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

با توجه به گزینه‌ها، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به یکی از صورت‌های $f(x)=a\sin(bx)+c$ یا $f(x)=a\cos(bx)+c$ باشد، داریم:

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۹+۳}{۲}=۶$$

$$\max=|a|+c\Rightarrow ۹=|a|+۶\Rightarrow a=\pm ۳$$

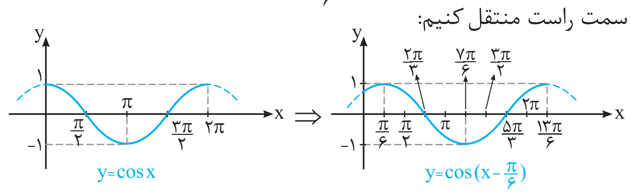
از طرفی دورهٔ تناوب هر یک از توابع مذکور، $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است. پس:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\xrightarrow{T=۳\pi} ۳\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{۲}{۳}\Rightarrow b=\pm\frac{۲}{۳}$$

چون نمودار تابع f را در اختیار نداریم و نیز اطلاعات دیگری در مورد ضابطهٔ آن داده نشده است، در مورد علامت a و b چیزی نمی‌توان گفت. بنابراین با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۳) می‌تواند درست باشد.

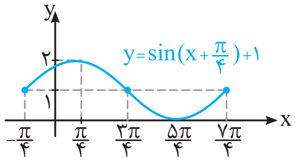
۱۷۴۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

کافی است نمودار $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{۶}$ واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل کنیم:



۱۷۴۵ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

کافی است نمودار $y=\sin x$ را $\frac{\pi}{۴}$ به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:

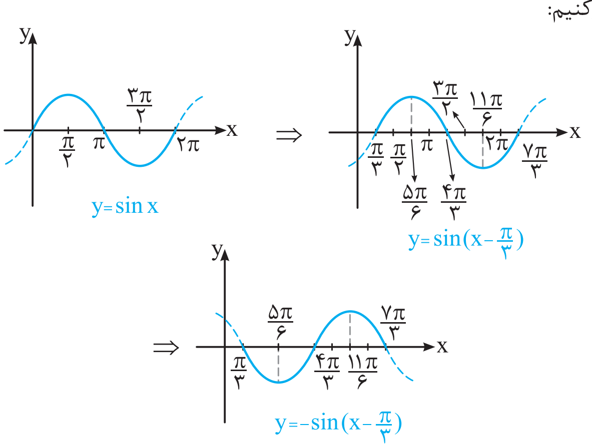


۱۷۴۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

می‌توان نوشت:

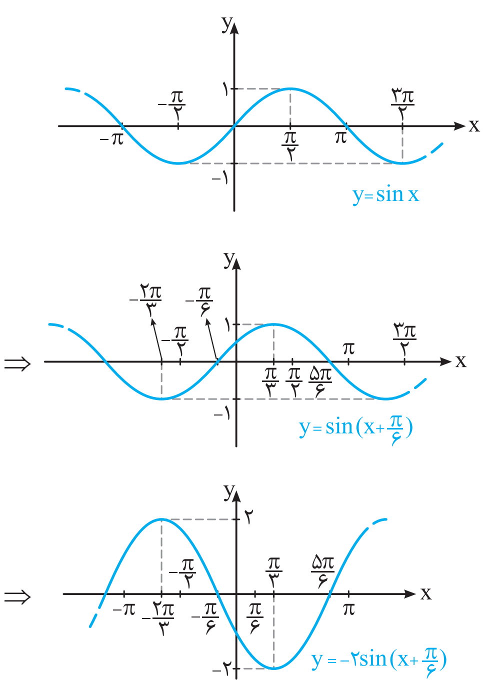
$$\sin(\frac{\pi}{۳}-x)=-\sin(x-\frac{\pi}{۳})$$

بنابراین برای رسم نمودار $y=\sin(\frac{\pi}{۳}-x)=-\sin(x-\frac{\pi}{۳})$، ابتدا نمودار $y=\sin x$ را $\frac{\pi}{۳}$ واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل کرده و در نهایت، نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



۱۷۴۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نمودار تابع f را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، نمودار تابع در بازهٔ $[-\frac{۲\pi}{۳},\frac{\pi}{۶}]$ از ناحیهٔ اول عبور نمی‌کند.

فصل ۸ مثلثات

قسمت ششم: تناوب و توابع مثلثاتی

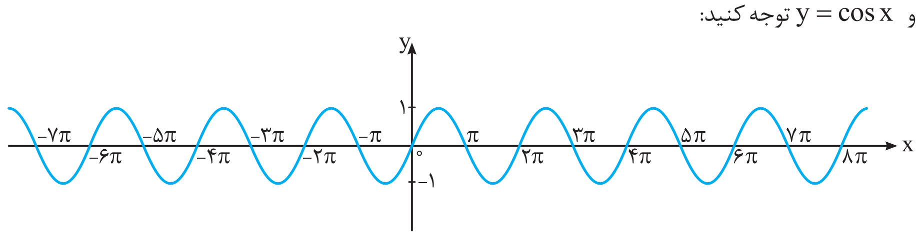
این قسمت معجونی از حسابان (۱) و (۲) هس. تو این قسمت با مفهوم تابع متناوب و فرمولای دورهٔ تناوب آشنا می‌شیم و یاد می‌گیریم چجوری ماکسیمم و مینیمم توابع مثلثاتی شامل سینوس و کسینوس رو به‌دست بیاریم. آخر سر هم خواص تابع تانژانت و نمودار اون رو مورد بررسی قرار می‌دیم.

تناوب

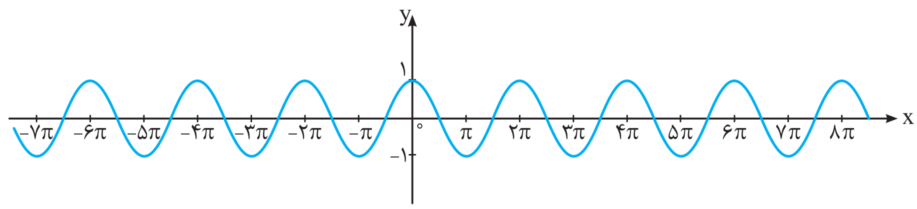
برخی از پدیده‌ها خاصیت تکرارشوندگی دارند مانند روزهای هفته، ماه‌های سال، حرکت عقربه‌های ساعت، حرکت آونگ، حرکت زمین به دور خورشید و ... به چنین پدیده‌هایی متناوب می‌گوییم خاصیت تکرارشوندگی در رفتار بسیاری از توابع و به خصوص توابع مثلثاتی نیز دیده می‌شود. در توابع متناوب، اگر رفتار تابع را در یک دورهٔ تناوب بررسی کنیم، مانند آن است که رفتار تابع را در تمام دامنهٔ آن بررسی کرده‌ایم.

به نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ توجه کنید:

$y=\sin x$



$y=\cos x$



با توجه به نمودارهای فوق، مقادیر توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها، یکسان است. در واقع اگر k عددی صحیح باشد، داریم $\sin(x\pm ۲k\pi)=\sin x$ و $\cos(x\pm ۲k\pi)=\cos x$، بنابراین اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در یک بازه به طول ۲π یا ۴π یا ... داشته باشیم، با تکرار این تکه، می‌توانیم این توابع را رسم نماییم.

اکنون به طور دقیق‌تر، به بررسی تابع متناوب و دورهٔ تناوب می‌پردازیم:

توابع متناوب و دورهٔ تناوب

تابع متناوب: تابع f را متناوب می‌گوییم، هرگاه عدد حقیقی غیر صفر c موجود باشد که اولاً برای هر $x\in D_f$، مقدار $x\pm c$ نیز متعلق به دامنهٔ تابع f باشد و ثانیاً $\mathbf{f(x\pm c)=f(x)}$. به عدد c دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم.

دورهٔ تناوب اصلی: به **کوچک‌ترین** عدد حقیقی و **مثبت** c که در تعریف فوق صدق کند، دورهٔ تناوب اصلی و یا به اختصار دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم و آن را با **T** نمایش می‌دهیم.

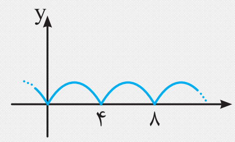
به طور مثال، تابع $f(x)=\sin x$ متناوب بوده و $T=۲\pi$ دورهٔ تناوب آن است، زیرا از آن‌جایی‌که دامنهٔ تابع $f(x)=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس برای هر $x\in D_f$، $x\pm ۲\pi$ نیز متعلق به D_f می‌باشد. همچنین داریم:

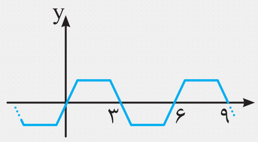
$$f(x+۲\pi)=\sin(۲\pi+x)=\sin x=f(x)$$

بدیهی است که به جای $c=۲\pi$، هر یک از اعداد $\pm ۲\pi$، $\pm ۴\pi$ و ... را نیز می‌توان قرار داد اما از این میان کوچک‌ترین عدد مثبت همان ۲π است، پس $T=۲\pi$

تعبیر هندسی دورهٔ تناوب: اگر f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آن‌گاه نمودار تابع f در هر بازه به طول T **تکرار** می‌شود. به عبارت دیگر، اگر نمودار تابع f را در یک دورهٔ تناوب مثلاً بازهٔ $[۰,T]$ در اختیار داشته باشیم، با تکرار این قسمت از نمودار f، می‌توان نمودار f را در همهٔ بازه‌ها رسم نمود. در واقع T، طول کوچک‌ترین بازه‌ای است که نمودار f تکرار می‌شود.

مثال: با توجه به نمودارهای زیر، دورهٔ تناوب اصلی تابع مربوط به این نمودارها را تعیین کنید.

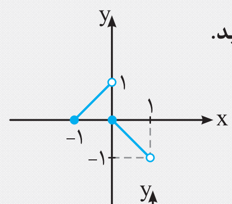
آ)


ب)


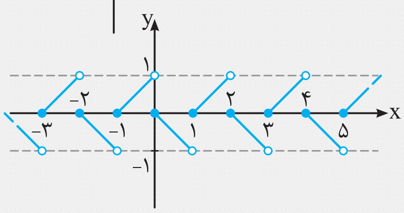
پاسخ : آ) طول کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع تکرار می‌شود، ۴ واحد است، پس $T=۴$

ب) طول کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع تکرار می‌شود، ۶ واحد است، پس $T=۶$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع متناوب f با دورهٔ تناوب $T=۲$ مطابق شکل مقابل باشد، نمودار تابع f را رسم کنید.



پاسخ : کافی است نمودار داده‌شده در بازهٔ $[-۱,۱)$ را در بازه‌های $[۱,۳)$، $[۳,۵)$، $[۵,۷)$ و ... و $[-۳,-۱)$ و ... تکرار کنیم:



نکته اگر a، b، c و d اعداد حقیقی و $a,b\neq ۰$ باشند، در این‌صورت:

$$\begin{cases} y=a\tan(bx+c)+d \\ y=a\cot(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|} \quad , \quad \begin{cases} y=a\sin(bx+c)+d \\ y=a\cos(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

تذکر در نکتهٔ فوق، ضرایب a، c و d تأثیری روی دورهٔ تناوب ندارند. در واقع ضرب یک عدد در تابع متناوب و نیز انتقال تابع متناوب، در دورهٔ تناوب آن تأثیری ندارد ولی در برد تابع مؤثر هستند.

مثال: دورهٔ تناوب اصلی توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $y=\sin(۳x-\frac{\pi}{۶})$ ب) $y=۲-۳\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ پ) $y=-۵\sin(\frac{۱}{۴}(۳-x))+۱$

ت) $y=۲\tan(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۵}x)$ ث) $y=۱-۵\tan(۲\pi x)$ ج) $y=۷\cot(\frac{\pi}{۶}-\frac{۲x}{۵})$

پاسخ : با استفاده از نکتهٔ قبل، دورهٔ تناوب توابع داده‌شده را می‌یابیم:

آ) $T=\frac{۲\pi}{|۳|}=\frac{۲\pi}{۳}$ ب) $T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|}=۴$ پ) $T=\frac{۲\pi}{|-\frac{۱}{۴}|}=۸\pi$

ت) $T=\frac{\pi}{|-\frac{\pi}{۵}|}=۵$ ث) $T=\frac{\pi}{|۲\pi|}=\frac{۱}{۲}$ ج) $T=\frac{\pi}{|-\frac{۲}{۵}|}=\frac{۵\pi}{۲}$

تست: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۲\sin(\frac{mx}{۳}-\frac{\pi}{۴})$ برابر دورهٔ تناوب تابع $g(x)=۱-\cos\frac{x}{۲}$ باشد، مقدار منفی m کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) -۴ ۴) -۶

پاسخ : دورهٔ تناوب تابع f برابر $T_۱=\frac{۲\pi}{|\frac{m}{۳}|}=\frac{۶\pi}{|m|}$ و دورهٔ تناوب تابع g برابر $T_۲=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi$ است. لذا طبق فرض داریم:

$$T_۱=T_۲\Rightarrow\frac{۶\pi}{|m|}=۴\pi\Rightarrow|m|=\frac{۶}{۴}\xrightarrow{m<۰}m=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

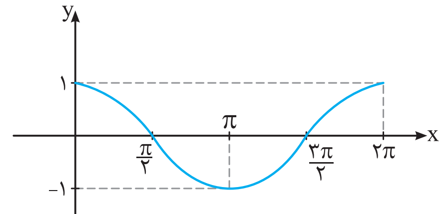
توابع مثلثاتی

توابعی که فقط شامل نسبت‌های مثلثاتی با ضرایب حقیقی باشند، توابع مثلثاتی نامیده می‌شوند. به طور مثال، هر یک از توابع $y=۲\sin x+۵$، $y=\cos۳x$ و $y=۲\sin^۲x+۵\cos۲x-۱$ یک تابع مثلثاتی می‌باشند.

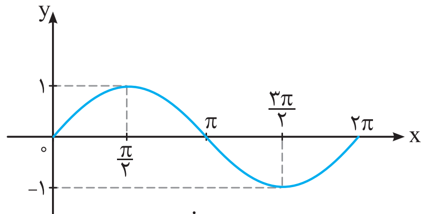
نکته توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$، ساده‌ترین توابع مثلثاتی می‌باشند. از آن‌جایی که برای هر عدد حقیقی x، $\sin x$ و $\cos x$ تعریف می‌شوند، پس **دامنهٔ** این توابع برابر $\mathbb{R}$ است و چون مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ همواره اعدادی در بازهٔ $[-۱,۱]$ می‌باشند، پس **بُرد** این توابع برابر $[-۱,۱]$ خواهد بود.

نمودار توابع مثلثاتی $y=\sin x$ ، $y=\cos x$

نمودار توابع مثلثاتی $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در یک دوره تناوب یعنی در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به‌صورت زیر می‌باشد:

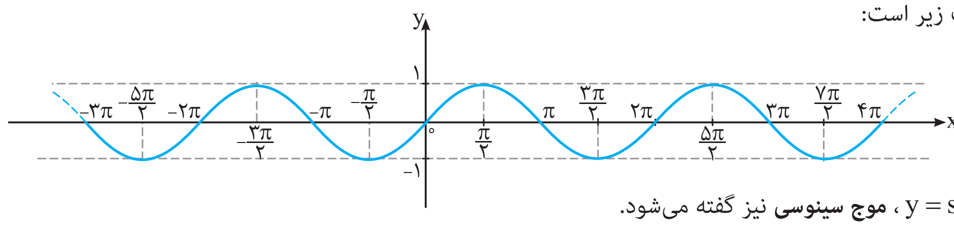


$y=\cos x$



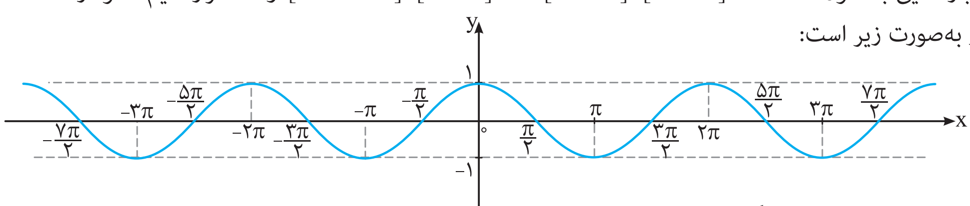
$y=\sin x$

همان‌طور که گفته شد، تابع $y=\sin x$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن $T=2\pi$ است. بنابراین اگر نمودار به‌دست آمده برای $y=\sin x$ را در بازه‌هایی به طول 2π، مانند $[2\pi, 4\pi]$، $[4\pi, 6\pi]$، ... ، $[-2\pi, 0]$، $[-4\pi, -2\pi]$ و ... تکرار کنیم، نمودار تابع $y=\sin x$ روی $\mathbb{R}$ رسم می‌شود. این نمودار به‌صورت زیر است:



به نمودار $y=\sin x$ ، **موج سینوسی** نیز گفته می‌شود.

مشابه آن‌چه در مورد $y=\sin x$ گفته شد، تابع $y=\cos x$ نیز متناوب بوده و $T=2\pi$ دورهٔ تناوب آن است. بنابراین اگر نمودار $y=\cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ را در بازه‌هایی به طول 2π، مانند $[2\pi, 4\pi]$، $[4\pi, 6\pi]$، ... ، $[-2\pi, 0]$، $[-4\pi, -2\pi]$ و ... تکرار کنیم، نمودار $y=\cos x$ روی $\mathbb{R}$ رسم می‌شود. این نمودار به‌صورت زیر است:



به نمودار $y=\cos x$ ، **موج کسینوسی** نیز گفته می‌شود.

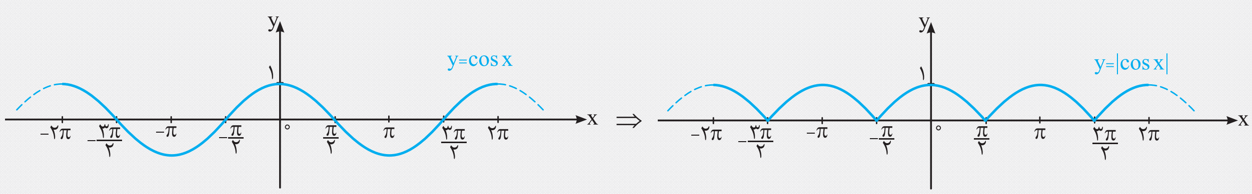
رسم نمودار برخی توابع به کمک نمودارهای $y=\sin x$ ، $y=\cos x$

با استفاده از توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ ، می‌توان توابع جدیدی ساخت و نمودار آن‌ها را به کمک نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ رسم نمود. به مثال زیر توجه کنید:

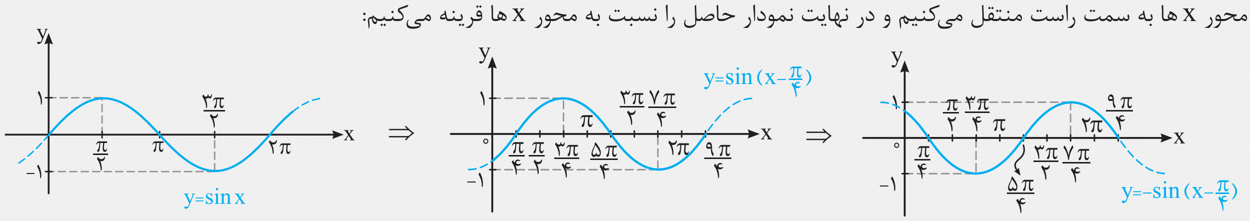
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید. (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $y=|\cos x|$ ب) $y=-\sin(x-\frac{\pi}{4})$

پاسخ : آ) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ ، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس بخش‌هایی از نمودار تابع f که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. بنابراین نمودار $y=|\cos x|$ به‌صورت زیر رسم می‌شود:



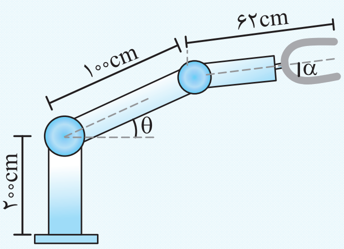
ب) با استفاده از انتقال، این نمودار را رسم می‌کنیم. برای این منظور ابتدا نمودار $y=\sin x$ را رسم کرده و سپس آن را $\frac{\pi}{4}$ واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسئله

توابع مثلثاتی در بسیاری از علوم به‌خصوص علم فیزیک کاربرد فراوان دارند. بسیاری از حرکت‌های متناوب مانند حرکت رفت و برگشت آونگ، حرکت دایره‌ای مانند حرکت سیّارات، حرکت نوسانی مانند حرکت نوسانی یک فنر یا حرکت موجی یک موج الکترومغناطیسی همه بر حسب توابع مثلثاتی بیان می‌شوند.

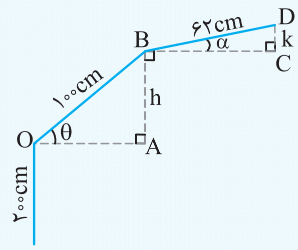
تست: شکل مقابل، یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد، نمایش می‌دهد. اگر برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۱۹ سانتی‌متری، این روبات مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -۳۰^\circ$ قرار دهد، زاویهٔ θ در این وضعیت چند درجه خواهد بود؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۳۰° ۲) ۴۵°

۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

پاسخ: شکل ساده‌تری از روبات را رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{OAB} : \sin\theta = \frac{h}{۱۰۰} \Rightarrow h = ۱۰۰\sin\theta$$

$$\overset{\Delta}{BCD} : \sin\alpha = \frac{k}{۶۲} \Rightarrow k = ۶۲\sin\alpha$$

ارتفاع نوک گیره از زمین: $y = ۲۰۰ + h + k \Rightarrow y = ۲۰۰ + ۱۰۰\sin\theta + ۶۲\sin\alpha$

طبق فرض $\alpha = -۳۰^\circ$ و $y = ۲۱۹$، پس:

$$۲۱۹ = ۲۰۰ + ۱۰۰\sin\theta + ۶۲\sin(-۳۰^\circ) \Rightarrow ۱۹ = ۱۰۰\sin\theta + ۶۲(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۱۹ = ۱۰۰\sin\theta - ۳۱ \Rightarrow ۱۰۰\sin\theta = ۵۰ \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

یعنی در این وضعیت باید مفصل اول با خط افقی زاویهٔ ۳۰° بسازد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

ماکسیمم و مینیمم توابع $y = a\sin(bx) + c$ و $y = a\cos(bx) + c$

می‌دانیم مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ به ترتیب برابر ۱ و ۱- می‌باشند. به کمک نکتهٔ زیر، مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابع $y = a\sin(bx) + c$ و $y = a\cos(bx) + c$، به‌دست می‌آید:

نکته به طور کلی در توابع $y = a\sin(bx) + c$ و $y = a\cos(bx) + c$ $(a , b \neq ۰)$ داریم:

$$\max = |a| + c \quad , \quad \min = -|a| + c$$

هم‌چنین عدد c همواره **میانگین** مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی:

$$c = \frac{\max + \min}{۲}$$

تذکر مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابع $y = a\sin(bx + d) + c$ و $y = a\cos(bx + d) + c$ نیز از روابط فوق به‌دست می‌آیند.

مثال: دورهٔ تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید. (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $y = -۲\sin(۳x) + ۱$ ب) $y = \sqrt{۲} - \cos(\frac{\pi}{۳}x)$ پ) $y = \pi\sin(۲x - ۳) - ۲$ ت) $y = ۴ - \frac{۳}{۵}\cos(۱ - \frac{۲x}{۵})$

پاسخ: بنابر نکتهٔ قبل و این‌که دورهٔ تناوب توابع $y = a\sin(bx + d) + c$ و $y = a\cos(bx + d) + c$ برابر $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است، مقادیر خواسته‌شده را می‌یابیم:

آ) $\min = -|-۲| + ۱ = -۱ \quad , \quad \max = |-۲| + ۱ = ۳ \quad , \quad T = \frac{۲\pi}{|۳|} = \frac{۲\pi}{۳}$

ب) $\min = -|-۱| + \sqrt{۲} = \sqrt{۲} - ۱ \quad , \quad \max = |-۱| + \sqrt{۲} = \sqrt{۲} + ۱ \quad , \quad T = \frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۳}|} = ۶$

پ) $\min = -|\pi| - ۲ = -\pi - ۲ \quad , \quad \max = |\pi| - ۲ = \pi - ۲ \quad , \quad T = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi$

ت) $\min = -|-\frac{۳}{۵}| + ۴ = -\frac{۳}{۵} + ۴ = \frac{۱۷}{۵} \quad , \quad \max = |-\frac{۳}{۵}| + ۴ = \frac{۳}{۵} + ۴ = \frac{۲۳}{۵} \quad , \quad T = \frac{۲\pi}{|-\frac{۲}{۵}|} = ۵\pi$

تست: ضابطهٔ تابع مثلثاتی که دورهٔ تناوب آن $T=\frac{\pi}{۳}$ و مقادیر ماکسیمم و مینیمم آن برابر $\max=۲$ و $\min=-۴$ است، کدام می‌تواند باشد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

۱) $y=-۳\sin(۶x)+۱$ ۲) $y=۳\cos(۱-۶x)-۱$ ۳) $y=-۳\cos(۶x)+۱$ ۴) $y=۳\sin(۶\pi x-\frac{\pi}{۳})-۱$

پاسخ: ضابطهٔ تابع مثلثاتی می‌تواند به یکی از شکل‌های $y=a\sin(bx+d)+c$ یا $y=a\cos(bx+d)+c$ باشد.
می‌دانیم $\max=|a|+c$ و $\min=-|a|+c$ و c میانگین مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. پس:

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۲+(-۴)}{۲}=-۱$$

$$\max=|a|+c \xrightarrow{c=-۱} ۲=|a|-۱ \Rightarrow |a|=۳ \Rightarrow a=\pm ۳$$

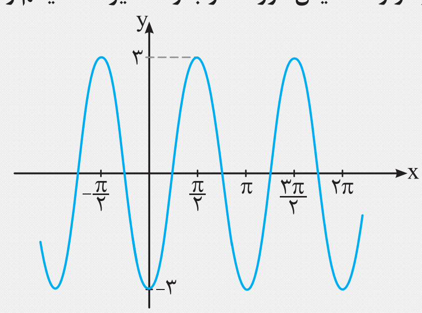
از طرفی:

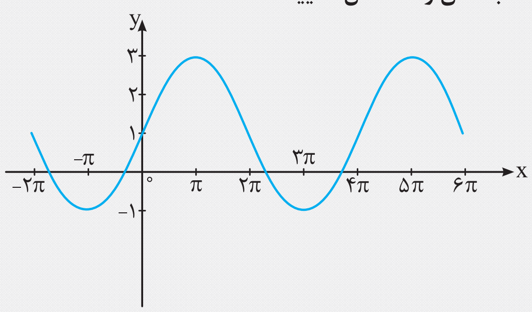
$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \xrightarrow{T=\frac{\pi}{۳}} \frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=۶ \Rightarrow b=\pm ۶$$

با اطلاعات سؤال، در مورد مثبت یا منفی بودن a و b چیزی نمی‌دانیم. بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر به یکی از صورت‌های $y=\pm ۳\sin(\pm ۶x+d)-۱$ یا $y=\pm ۳\cos(\pm ۶x+d)-۱$ می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته آ) نمودار تابع به شکل $y=a\cos(bx)+c$، همواره دارای **مینیمم یا ماکسیمم** روی **محور yها** است. همچنین اگر تابع روی محور yها دارای **ماکسیمم** باشد، $a>۰$ و چنانچه روی محور yها دارای **مینیمم** باشد، $a<۰$ خواهد بود. در مورد علامت b نمی‌توان اظهار نظر کرد.
ب) اگر نمودار تابع به شکل $y=a\sin(bx)+c$، در سمت راست محور yها و از چپ به راست، **ابتدا دارای ماکسیمم** و سپس دارای مینیمم باشد، در این صورت **a و b هم‌علامت** هستند و چنانچه **ابتدا دارای مینیمم** و سپس دارای ماکسیمم باشد، آنگاه **a و b مختلف‌العلامه** می‌باشند.

مثال: هر یک از نمودارهای داده‌شده در زیر، مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x)=a\sin(bx)+c$ یا $f(x)=a\cos(bx)+c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.

آ)


ب)


پاسخ: آ) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر روی محور yها دارای مینیمم است، پس مربوط به تابع $y=a\cos(bx)+c$ می‌باشد. مقدار ماکسیمم و مینیمم این تابع به ترتیب برابر ۳ و ۳- است. چون مقادیر ماکسیمم و مینیمم به ترتیب برابر $|a|+c$ و $-|a|+c$ بوده و c میانگین این دو مقدار می‌باشد، پس:

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۳+(-۳)}{۲}=۰$$

$$\max=|a|+c \Rightarrow ۳=|a|+۰ \Rightarrow |a|=۳$$

با توجه به نمودار، تابع روی محور yها دارای مینیمم است، پس طبق نکتهٔ قبل $a=-۳$

از سوی دیگر دورهٔ تناوب تابع با توجه به نمودار آن، برابر $T=\pi$ است. پس:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \xrightarrow{T=\pi} \pi=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=۲$$

واضح است که در این حالت مثبت یا منفی بودن b تأثیری در ضابطه ندارد (زیرا $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$) پس می‌توان گفت $b=۲$ و لذا ضابطهٔ این نمودار به‌صورت $f(x)=-۳\cos ۲x$ است.

ب) نمودار تابع روی محور yها ماکسیمم یا مینیمم ندارد، پس این نمودار مربوط به تابع $y=a\sin(bx)+c$ است.
مقادیر ماکسیمم و مینیمم این تابع به ترتیب برابر ۳ و ۱- است. پس داریم:

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۳+(-۱)}{۲} \Rightarrow c=۱$$

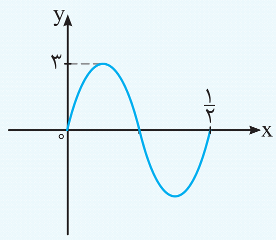
$$\max=|a|+c \Rightarrow ۳=|a|+۱ \Rightarrow |a|=۲$$

از طرفی دورهٔ تناوب این تابع از روی نمودار برابر $T=۴\pi$ است. پس داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \xrightarrow{T=۴\pi} ۴\pi=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}$$

نمودار تابع، در سمت راست محور yها، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم است. پس a و b هم‌علامت هستند. پس $a=۲$ و $b=\frac{۱}{۲}$
یا $a=-۲$ و $b=-\frac{۱}{۲}$ که در هر دو حالت ضابطهٔ تابع صورت مقابل درمی‌آید: $f(x)=۲\sin(\frac{۱}{۲}x)+۱$

تست: شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)+c$ در یک دورهٔ تناوب می‌باشد. $f(\frac{۱}{۱۲})$ کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: نمودار تابع از مبدأ می‌گذرد، پس:

$$f(۰)=۰ \Rightarrow a\sin ۰ + c = ۰ \Rightarrow c=۰$$

مطابق شکل، نمودار تابع در سمت راست محور yها، ابتدا دارای ماکسیمم و سپس دارای مینیمم است. پس a و b هم‌علامت‌اند. $(ab>۰)$، همچنین داریم:

$$\max = |a|+c \Rightarrow ۳=|a|+۰ \Rightarrow |a|=۳$$

با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)+c$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}$ است. پس:

$$\frac{۲\cancel{\pi}}{|b\cancel{\pi}|}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow |b|=۴$$

چون a و b هم‌علامت بودند، پس یا هر دو مثبت‌اند و یا هر دو منفی. بنابراین دو حالت زیر را داریم:

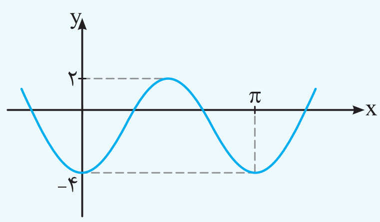
حالت اول: $a=۳ ، b=۴ \Rightarrow f(x)=۳\sin ۴\pi x$

حالت دوم: $a=-۳ ، b=-۴ \Rightarrow f(x)=-۳\sin(-۴\pi x)=-۳(-\sin ۴\pi x)=۳\sin ۴\pi x$

بنابراین در هر دو حالت به تابع $f(x)=۳\sin ۴\pi x$ می‌رسیم. در نتیجه:

$$f(\frac{۱}{۱۲})=۳\sin\frac{۴\pi}{۱۲}=۳\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=a\sin(\frac{\pi}{۲}+bx)+c$ است. مقدار $f(\frac{۵\pi}{۳})$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$، پس:

$$f(x)=a\sin(\frac{\pi}{۲}+bx)+c=a\cos bx + c$$

نمودار کسینوسی روی محور yها دارای مینیمم است، پس $a<۰$. بنابراین داریم:

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۲+(-۴)}{۲}=-\frac{۲}{۲}=-۱$$

$$\max=|a|+c\Rightarrow ۲=|a|-۱\Rightarrow |a|=۳\xrightarrow{a<۰} a=-۳$$

فاصلهٔ دو مینیمم متوالی همان دورهٔ تناوب تابع است. پس:

$$T=\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=۲$$

علامت b در تابع $f(x)=a\cos(bx)+c$ اهمیتی ندارد. پس:

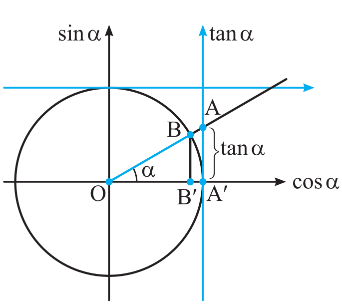
$$f(x)=-۳\cos(۲x)-۱\Rightarrow f(\frac{۵\pi}{۳})=-۳\cos(\frac{۱۰\pi}{۳})-۱=-۳\cos(\frac{۹\pi+\pi}{۳})-۱=-۳\cos(\underbrace{۳\pi}_{\text{مانند } \pi}+\frac{\pi}{۳})-۱$$

$$=-۳\cos\underbrace{(\pi+\frac{\pi}{۳})}_{\text{ربع سوم}}-۱=-۳(-\cos\frac{\pi}{۳})-۱=۳\cos\frac{\pi}{۳}-۱=۳\times\frac{۱}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تابع تانژانت

در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، زاویهٔ α و نیز محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. حال اگر در نقطهٔ A' عمودی بر محور xها رسم کنیم تا امتداد OB را در نقطهٔ A قطع کند، آن‌گاه خط AA' بر دایرهٔ مثلثاتی در نقطهٔ A' مماس بوده و مقدار AA' برابر $\tan\alpha$ است. زیرا داریم:

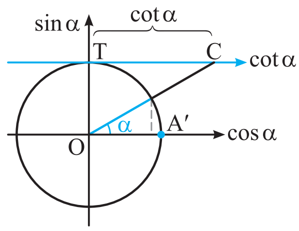


$$\overset{\Delta}{OBB'}: \tan\alpha=\frac{BB'}{OB'} \qquad (*)$$

$$\overset{\Delta}{OBB'}\sim\overset{\Delta}{OAA'}\Rightarrow\frac{BB'}{OB'}=\frac{AA'}{OA'}\xrightarrow{OA'=۱}\frac{BB'}{OB'}=AA'\xrightarrow{(*)}\tan\alpha=AA'$$

محور تانژانت‌ها و محور کتانژانت‌ها

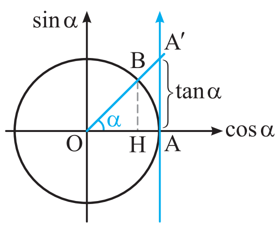
محور عمودی شامل AA' که در نقطهٔ A' بر دایره مماس می‌باشد، **محور تانژانت‌ها** نام دارد. زیرا اندازهٔ جبری محل تقاطع ضلع پایانی زاویهٔ α با آن محور تا نقطهٔ A' بیانگر $\tan\alpha$ است. در واقع در دایرهٔ مثلثاتی شکل قبل داریم: $AA' = \tan\alpha$



تذکر به طریق مشابه در دایرهٔ مثلثاتی مقابل می‌توان ثابت کرد $\cot\alpha = TC$. از این رو به **محور افقی** شامل TC که در نقطهٔ T بر دایرهٔ مثلثاتی مماس است، **محور کتانژانت‌ها** می‌گویند.

مقایسهٔ تانژانت و سینوس

در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی، علامت سینوس مثبت و علامت تانژانت منفی است، پس اگر $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$ باشد، $\tan\alpha < \sin\alpha$، همچنین در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی، تانژانت مثبت و سینوس منفی بوده و لذا اگر $\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، $\sin\alpha < \tan\alpha$. پس در این دو ربع تکلیف مشخص است. حال می‌خواهیم در ربع‌های اول و چهارم که سینوس و تانژانت هم‌علامت هستند، آن‌ها را مقایسه کنیم.



با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، می‌توان سینوس و تانژانت یک زاویه را در ربع‌های اول و چهارم مقایسه نمود. دایرهٔ مثلثاتی مقابل را در نظر بگیرید، اگر $\circ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه داریم:

$$\sin\alpha = \frac{BH}{OB} \xrightarrow{OB=۱} \sin\alpha = BH$$

همچنین $AA' = \tan\alpha$. با توجه به شکل بدیهی است که $BH < AA'$. پس وقتی $\circ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\sin\alpha < \tan\alpha$

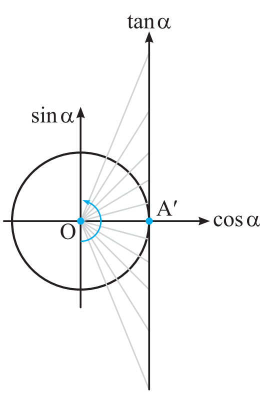
حال اگر $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \circ$ باشد، آن‌گاه $\circ < -\alpha < \frac{\pi}{۲}$، بنابراین داریم: $\sin(-\alpha) < \tan(-\alpha) \Rightarrow -\sin\alpha < -\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha < \sin\alpha$

بنابراین نکتهٔ زیر را داریم:

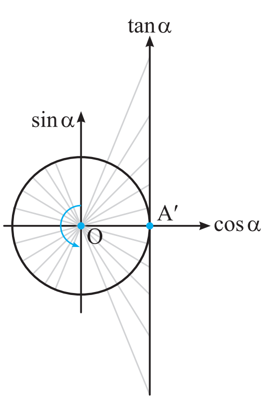
نکته آ) اگر α در **ربع اول** باشد، آن‌گاه: $\sin\alpha < \tan\alpha$

ب) اگر α در **ربع چهارم** باشد، آن‌گاه: $\tan\alpha < \sin\alpha$

تغییرات تانژانت



با توجه به شکل مقابل، وقتی زاویهٔ α از $-\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند، مقدار $\tan\alpha$ افزایش می‌یابد و روند صعودی را طی می‌کند. در واقع $\tan\alpha$ در $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ تعریف نمی‌شود، اما وقتی زاویهٔ α (در ناحیهٔ چهارم) نزدیک $-\frac{\pi}{۲}$ است، مقدار تانژانت α نزدیک $-\infty$ است، با افزایش α از $-\frac{\pi}{۲}$ به $\frac{\pi}{۲}$، مقدار تانژانت α نیز رفته رفته افزایش می‌یابد و در نزدیکی $\frac{\pi}{۲}$ (در ناحیهٔ اول) به $+\infty$ نزدیک می‌شود.

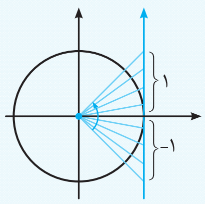


به طریق مشابه مطابق شکل مقابل، وقتی زاویهٔ α از $\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$ تغییر می‌کند، باز هم مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند.

پس نکتهٔ زیر را داریم:

نکته تابع $f(x) = \tan x$ در نقاط $x = \frac{\pi}{۲}$، $x = \frac{۳\pi}{۲}$ و به طور کلی در $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ $(k \in \mathbb{Z})$ **تعریف نشده** است. همچنین در هر یک از بازه‌های $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$، $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ و به طور کلی در بازهٔ $(k\pi - \frac{\pi}{۲}, k\pi + \frac{\pi}{۲})$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$، **صعودی اکید** است و در این بازه‌ها از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.

تست: اگر $\tan ۲\alpha = ۲m - ۳$ و $-\frac{\pi}{۸} < \alpha < \frac{\pi}{۸}$، حدود m کدام است؟



۱) $-۱ < m < ۱$

۲) $-۲ < m < -۱$

۳) $۱ < m < ۲$

۴) $۲ < m < ۳$

پاسخ :

$$-\frac{\pi}{۸} < \alpha < \frac{\pi}{۸} \xrightarrow{\times ۲} -\frac{\pi}{۴} < ۲\alpha < \frac{\pi}{۴}$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی وقتی زاویهٔ ۲α از $-\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۴}$ تغییر می‌کند، مقدار $\tan ۲\alpha$ از -۱ شروع شده و با یک روند افزایشی به عدد ۱ نزدیک می‌شود، سپس می‌توان نوشت:

$$-\frac{\pi}{۴} < ۲\alpha < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow -۱ < \tan ۲\alpha < ۱ \Rightarrow -۱ < ۲m - ۳ < ۱ \Rightarrow ۲ < ۲m < ۴ \Rightarrow ۱ < m < ۲ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

نمودار تابع $f(x) = \tan x$

همان‌طور که گفتیم، تابع $f(x) = \tan x$ به ازای $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ $(k \in \mathbb{Z})$ تعریف نمی‌شود و در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی اکید است. با توجه به این مطلب، می‌توان به کمک نقطه‌یابی، نمودار آن را رسم کرد. برای آشنایی با نمودار $y = \tan x$ و روش رسم آن، به مثال زیر توجه نمایید:

مثال: تابع $y = \tan x$ را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ در نظر بگیرید. آ) جدول زیر را کامل کنید. $(\sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \text{ ، } \frac{\sqrt{۳}}{۳} \simeq ۰/۵۸)$

x (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
y = tan x	۰	۰/۵۸													

ب) نقاط به‌دست آمده در جدول فوق را در دستگاه مختصات مشخص کرده و با توجه به این‌که تابع $y = \tan x$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = \frac{۳\pi}{۲}$ از این بازه تعریف نشده است، تابع $y = \tan x$ را رسم کنید.

پ) با توجه به نمودار، تعیین کنید آیا تابع $y = \tan x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ یکنوا است؟

پاسخ : آ)

$$x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow y = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱ \text{ ، } x = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow y = \tan\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳} \simeq ۱/۷$$

$$x = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow y = \tan\frac{۲\pi}{۳} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳} \simeq -۱/۷$$

$$x = \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow y = \tan\frac{۳\pi}{۴} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$x = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow y = \tan\frac{۵\pi}{۶} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \simeq -۰/۵۸$$

$$x = \pi \Rightarrow y = \tan\pi = ۰$$

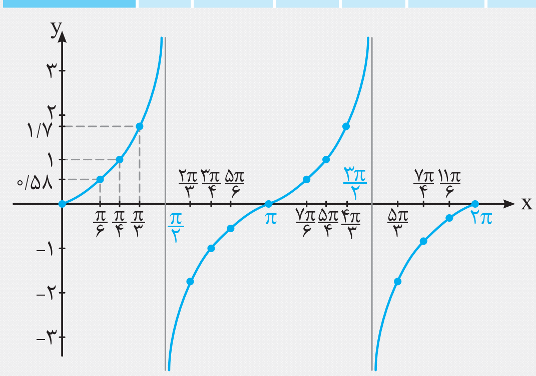
به همین ترتیب داریم:

$$\tan(\frac{۷\pi}{۶}) \simeq ۰/۵۸ \text{ ، } \tan\frac{۵\pi}{۴} = ۱ \text{ ، } \tan\frac{۴\pi}{۳} \simeq ۱/۷ \text{ ، } \tan\frac{۵\pi}{۳} \simeq -۱/۷ \text{ ، } \tan\frac{۷\pi}{۴} = -۱ \text{ ، } \tan\frac{۱۱\pi}{۶} \simeq -۰/۵۸ \text{ ، } \tan ۲\pi = ۰$$

بنابراین جدول داده‌شده به‌صورت زیر تکمیل می‌شود:

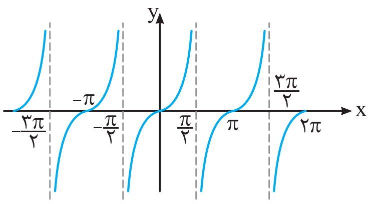
x (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
y = tan x	۰	۰/۵۸	۱	۱/۷	−۱/۷	−۱	−۰/۵۸	۰	۰/۵۸	۱	۱/۷	−۱/۷	−۱	−۰/۵۸	۰

ب) با توجه به این‌که تابع $y = \tan x$ در هر بازه صعودی اکید و در $x = \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نشده است، لذا نمودار این تابع به‌صورت مقابل درمی‌آید:

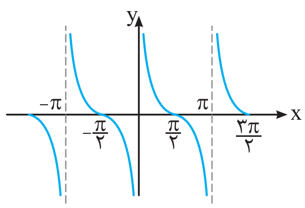


پ) با توجه به نمودار معلوم می‌شود که تابع $y = \tan x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ غیریکنوا است.

نکته با توجه به رابطهٔ $\tan(x+\pi)=\tan x$ و $\cot(x+\pi)=\cot x$، معلوم می‌شود که توابع $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\cot x$ متناوب با دورهٔ تناوب $T=\pi$ هستند و نمودار آن‌ها به‌صورت مقابل است:



$f(x)=\tan x$



$g(x)=\cot x$

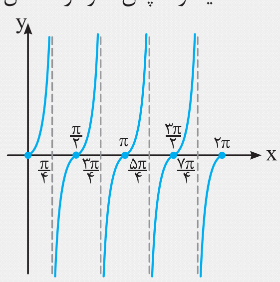
با توجه به نمودارهای فوق، داریم:

$$f(x)=\tan x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}\ ,\ R_f=\mathbb{R} \quad , \quad g(x)=\cot x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\ ,\ R_f=\mathbb{R}$$

مثال: نمودار توابع زیر را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

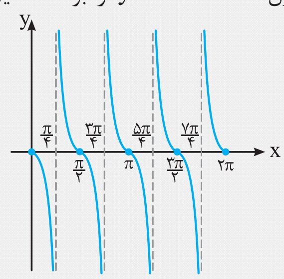
آ) $y=-\tan 2x$ ب) $y=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$

پاسخ: آ) ابتدا طول نقاط $y=\tan x$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار $y=\tan 2x$ به‌دست آید و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



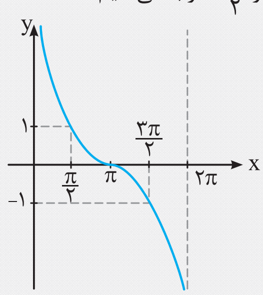
$y=\tan 2x$

$\Rightarrow$



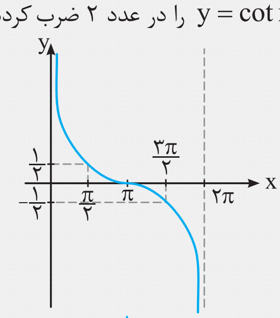
$y=-\tan 2x$

ب) ابتدا طول نقاط $y=\cot x$ را در عدد ۲ ضرب کرده و سپس عرض همهٔ نقاط حاصل را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:



$y=\cot\frac{x}{2}$

$\Rightarrow$



$y=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$

خلاصه فصل هشتم: قسمت ششم: «تناوب و توابع مثلثاتی»

توابع متناوب و دورهٔ تناوب

تابع متناوب: تابع f را متناوب می‌گوییم، هرگاه عدد حقیقی غیرصفر c موجود باشد که اولاً برای هر $x\in D_f$، مقدار $x\pm c$ نیز متعلق به دامنهٔ تابع f باشد و ثانیاً $f(x\pm c)=f(x)$. به عدد c دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم.

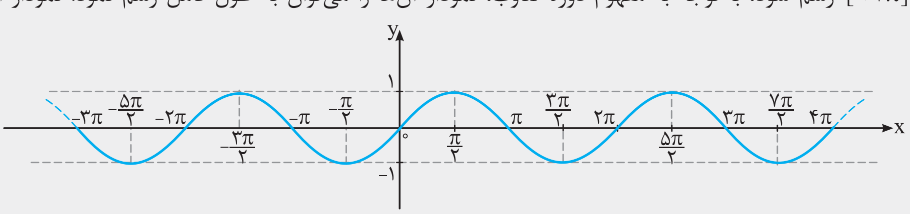
دورهٔ تناوب اصلی: به **کوچک‌ترین** عدد حقیقی و **مثبت** c که در تعریف فوق صدق کند، دورهٔ تناوب اصلی و یا به اختصار دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم و آن را با T نمایش می‌دهیم.

نکته اگر a، b، c و d اعداد حقیقی و $a,b\neq 0$ باشند، در این‌صورت:

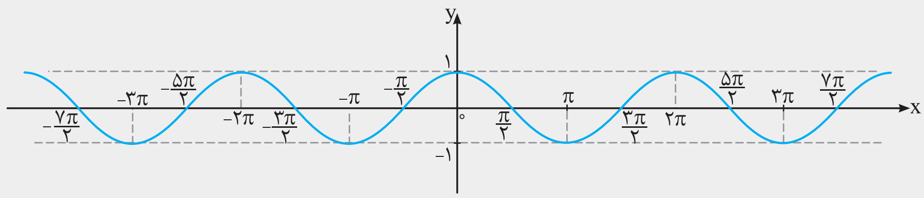
$$\begin{cases} y=a\sin(bx+c)+d \\ y=a\cos(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|} \quad , \quad \begin{cases} y=a\tan(bx+c)+d \\ y=a\cot(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

نمودار توابع مثلثاتی $y=\sin x$ و $y=\cos x$

$y=\sin x$ و $y=\cos x$، ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند. از آن‌جایی که دوره تناوب این دو تابع برابر $T=2\pi$ است، لذا اگر نمودار این توابع در یک بازه به طول 2π، مثلاً بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم شود، با توجه به مفهوم دوره تناوب، نمودار آن‌ها را می‌توان به طول کامل رسم نمود. نمودار این توابع به‌صورت مقابل است:



$y=\sin x$



$y=\cos x$

به نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به ترتیب، موج سینوسی و موج کسینوسی هم گفته می‌شود.

کاربرد توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی در بسیاری از علوم به خصوص علم فیزیک کاربرد فراوان دارند. نمونه‌هایی از این کاربردها کـه مربـوط بـه روبات‌هـای صـنعتی در صـنایع خودروسازی است، در متن درس دیدیم.

نکته به طور کلی در توابع $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$ $(a,b\neq ۰)$ داریم:

$\boxed{\max=|a|+c}$ ، $\boxed{\min=-|a|+c}$

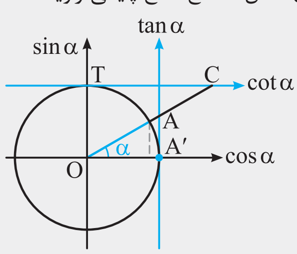
هم‌چنین عدد c همواره **میانگین** مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی: $\boxed{c=\frac{\max+\min}{۲}}$

نکته آ) نمودار تابع به شکل $y=a\cos(bx)+c$ ، همواره دارای مینیمم یا ماکسیمم روی محور yها است. هم‌چنین اگر تابع روی محور yهـا دارای ماکسیمم باشد، $a>۰$ و چنان‌چه روی محور yها دارای مینیمم باشد، $a<۰$ خواهد بود. در مورد علامت b نمی‌توان اظهارنظر کرد.

ب) اگر نمودار تابع به شکل $y=a\sin(bx)+c$ ، در سمت راست محور yها و از چپ بـه راسـت، ابتـدا دارای ماکسـیمم و سـپس دارای مینـیمم باشد، در این صورت a و b هم‌علامت هستند و چنان‌چه ابتدا دارای مینیمم و سپس دارای ماکسیمم باشد، آنگاه a و b مختلف‌العلامه می‌باشند.

محور تانژانت‌ها و محور کتانژانت‌ها

به **محور عمودی** شامل AA' که در نقطهٔ A' بر دایره مماس می‌باشد، **محور تانژانت‌ها** می‌گویند. زیرا اندازهٔ جبری محل تقاطع ضلع پایانی زاویـهٔ α با آن محور تا نقطهٔ A' (یعنی AA') بیانگر $\tan\alpha$ است.



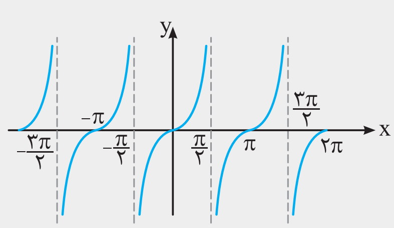
تـذکـر به طریق مشابه در دایرهٔ مثلثاتی مقابل می‌توان ثابت کرد $\cot\alpha=TC$. از این رو بـه **محـور افقـی** شامل TC که در نقطهٔ T بر دایرهٔ مثلثاتی مماس است، **محور کتانژانت‌ها** می‌گویند.

نکته آ) اگر α در **ربع اول** باشد، آن‌گاه: $\boxed{\sin\alpha<\tan\alpha}$

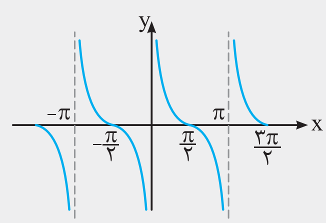
ب) اگر α در **ربع چهارم** باشد، آن‌گاه: $\boxed{\tan\alpha<\sin\alpha}$

نکته تابع $\mathbf{f(x)=\tan x}$ در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}$ ، $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و به طور کلی در $\mathbf{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}}$ $(k\in\mathbb{Z})$ **تعریف نشده** است. هم‌چنین در هر یک از بازه‌های $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ ، $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ و به طور کلی در بازهٔ $(\mathbf{k\pi-\frac{\pi}{۲}},\mathbf{k\pi+\frac{\pi}{۲}})$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$ ، **صعودی اکید** است و در این بازه‌هـا از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.

نکته با توجه به رابطهٔ $\tan(x+\pi)=\tan x$ و $\cot(x+\pi)=\cot x$ معلوم می‌شود که توابع $\mathbf{f(x)=\tan x}$ و $\mathbf{g(x)=\cot x}$ متنـاوب بـا دورهٔ تناوب $\mathbf{T=\pi}$ هستند و نمودار آن‌ها به‌صورت زیر است:



$f(x)=\tan x$



$g(x)=\cot x$

با توجه به نمودارهای فوق، داریم:

$\boxed{f(x)=\tan x\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{۲}\mid k\in\mathbb{Z}\}\ ,\ R_f=\mathbb{R}}$ ، $\boxed{g(x)=\cot x\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\ ,\ R_f=\mathbb{R}}$